المتتاليات والسلاسل العقدية

1 المتتالية العقدية:

إذا كان يقابل كل عدد طبيعي n عدداً عقدياً z_n فإن الأعداد:

$$\{z_n\} = \{z_1, z_2, z_3, \dots\dots, z_n, \dots\}$$

تشكل متتالية عقدية لانهائية، وكل عدد في هذه المتتالية يسمى حداً في المتتالية. يسمى z_1 بالحد الأول، ويسمى z_n بالحد العام.

بتعويض $z_n = x_n + iy_n$ نلاحظ أن كل متتالية عقدية $\{z_n\}$ تعين متتاليتين من الاعداد الحقيقية $\{y_n\}$ و $\{x_n\}$.

تعريف:

نقول عن المتتالية العقدية $\{z_n\}$ أنها متقاربة من z_o أي:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_o \quad \text{أو} \quad z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} z_o$$

إذا كان من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعي n_o بحيث تتحقق المتراجحة التالية:

$$|z_n - z_o| < \varepsilon \ , \qquad \forall\, n > n_o$$

نظرية:

إذا كان $z_n = x_n + iy_n$ و $z_o = x_o + iy_o$

فإن المتتالية العقدية $\{z_n\}$ تتقارب من العدد z_o إذا وفقط إذا تقاربت المتتاليتان الحقيقيتان $\{y_n\}$ و $\{x_n\}$ من العددين y_o و x_o على الترتيب أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_o \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x_o \ , \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_o$$

مثال(1):

أثبت أن المتتالية التي حدها العام $\{z_n\} = \frac{2n+3}{n} - i\frac{n-1}{n}$ متقاربة من العدد $z_o = 2 - i$.

الحل:

من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعي n بحيث تتحقق المتراجحة:

$$|z_n - z_o| < \varepsilon \ , \qquad \forall\, n > n_o$$

$$\Rightarrow |z_n - z_o| = \left|\frac{2n+3}{n} - i\frac{n-1}{n} - (2-i)\right|$$

$$= \left|\frac{3}{n} + \frac{i}{n}\right| = \frac{\sqrt{10}}{n} < \varepsilon$$

ومنه: $|z_n - z_o| = \frac{\sqrt{10}}{n} < \varepsilon$ وذلك عندما $n > \frac{\sqrt{10}}{\varepsilon}$

فإذا أخذنا $\varepsilon = \frac{1}{100}$ فإن $n > 100\sqrt{10} = 316$ أي أن $n = 317, 318, \dots$.

تعريف:

تكون المتتالية $\{z_n\}$ محدودة إذا كان $|z_n| \le M$ من أجل جميع قيم n، حيث M عدد حقيقي ثابت.

2 متتالية التوابع العقدية:

إذا كان لدينا متتالية حدودها عبارة عن توابع عقدية:

$$f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z)$$

معرفة على منطقة D من المستوي العقدي فإننا نقول عن المتتالية:

$$\{f_n(z)\} = \{f_1(z), f_2(z), f_3(z), \dots, f_n(z), ..\}$$

متتالية توابع عقدية في D.

تعريف:

نقول عن متتالية التوابع العقدية $\{f_n(z)\}$ أنها متقاربة من التابع $f(z)$ أي:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$$

إذا كان من أجل أي عدد حقيقي $\varepsilon>0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعي n_o بحيث تتحقق المتراجحة التالية:

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad , \qquad \forall\, n > n_o$$

3 السلاسل العقدية:

لتكن لدينا المتتالية العقدية $\{z_n\} = \{z_1, z_2, z_3, \dots\dots, z_n, \dots\}$

حدودها أعداد عقدية $z_n = x_n + iy_n$

تسمى مجموع حدود متتالية عقدية بسلسلة عقدية ونكتب:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n + \cdots$$

تسمى الأعداد $z_1, z_2, z_3, \dots\dots, z_n, \dots$ حدود السلسلة، ونسمي الحد z_n بالحد العام للسلسلة العقدية.

نسمي مجموع عدد من حدود السلسلة وليكن n حداً، بالمجموع الجزئي النوني للسلسلة ويرمز له بـ S_n:

$$S_n = z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n$$

تسمى المتتالية التي حدها العام $\{S_n\}$ متتالية المجاميع الجزئية أي:

$$\{S_n\} = S_1, S_2, S_3, \dots\dots, S_n, \dots$$

أما مجموع باقي حدود السلسلة بدءاً من الحد n+1 يسمى باقي السلسلة ويرمز له بـ R_n:

$$R_n = S_{n+1} + S_{n+2} + S_{n+3} + \cdots.$$

تعريف:

نقول عن السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ أنها متقاربة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متقاربة من العدد العقدي S ونقول عن S أنه مجموع السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

وتكون السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متباعدة إذا كانت متتالية المجاميع الجزئية $\{S_n\}$ متباعدة.

نظرية:

تكون السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + iv_n)$$

حيث u_n, v_n أعداد حقيقية

متقاربة إذا وفقط إذا كانت السلسلتان:

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ، $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ متقاربتان.

نظرية:

تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة إذا تحقق الشرط التالي:

إذا كان من أجل أي عدد حقيقي موجب $\varepsilon>0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعي n_o بحيث تتحقق المتراجحة التالية:

$$|S_m - S_n| = |z_{m+1} + z_{m+2} + \cdots + z_m| < \varepsilon \quad , \qquad \forall\, n, m > n_o$$

ملاحظة:

- الشرط اللازم ولكن غير كافي لتقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ هو أن ينتهي حدها العام إلى الصفر
- تكون السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متباعدة إذا كان $\lim_{n\to\infty} z_n \neq 0$.

تعريف:

تكون السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة مطلقاً إذا كانت سلسلة القيم المطلقة لها متقاربة أي ($\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ متقاربة).

تكون السلسلة العقدية $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة شرطياً إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة وسلسلة القيم المطلقة لها متباعدة أي ($\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ متباعدة).

3.1 اختبارات التقارب والتباعد للسلاسل:

1) اختبار المقارنة:

إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متقاربة وكان $|z_n| \leq |u_n|$ من أجل جميع قيم $n > n_o$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ متقاربة مطلقاً.

أما إذا كانت السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ متباعدة وكان $|z_n| \geq |u_n|$ فإن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$ متباعدة.

مثال(2):

السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{i}^n}{n3^n}$$

متقاربة مطلقاً وذلك لأن:

$$\left|\frac{\mathrm{i}^n}{n3^n}\right| \leq \frac{1}{3^n} \quad , n = 1, 2, ..$$

والسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ متقاربة.

2) اختبار دالامبير:

إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = q$$

إذا كانت $q < 1$ فالسلسة تكون متقاربة مطلقاً،

إذا كانت $q > 1$ فالسلسة تكون متباعدة،

إذا كانت $q = 1$ فالاختبار يفشل.

مثال(3):

اختبر تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n+1}$$

الحل:

اعتماداً على اختبار دالامبير:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \left|\frac{\frac{(1+\mathrm{i})^{n+1}}{n+2}}{\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n+1}}\right| = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \left|\frac{(1+\mathrm{i})^{n+1}}{n+2}.\frac{n+1}{(1+\mathrm{i})^n}\right| = |1+i| \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \frac{n+1}{n+2}$$

$$= \sqrt{2} > 1$$

إذا السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\mathrm{i})^n}{n+1}$ متباعدة.

3) اختبار الجذر النوني:

إذا كان:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = q$$

إذا كانت $q < 1$ فالسلسلة تكون متقاربة مطلقاً،

إذا كانت $q > 1$ فالسلسلة تكون متباعدة،

إذا كانت $q = 1$ فالاختبار يفشل.

مثال(4):

اختبر تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+\mathrm{i}}{5}\right)^n$$

الحل:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{2+\mathrm{i}}{5}\right)^n\right|} = \lim_{\mathrm{n}\to\infty} \left|\left(\frac{2+\mathrm{i}}{5}\right)\right| = \frac{\sqrt{5}}{5} < 1$$

إذا السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+\mathrm{i}}{5}\right)^n$ متقاربة مطلقاً.

4) اختبار راب:

يمكننا عند فشل اختبار دالامبير أن نستعيض عنه باختبار راب، حيث:

إذا كان:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty} n\left[1 - \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right] = q$$

إذا كانت $q > 1$ فالسلسلة تكون متقاربة مطلقاً،

إذا كانت $q < 1$ فالسلسلة تكون متباعدة،

إذا كانت $q = 1$ فالاختبار يفشل.

مثال(5):

اختبر تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)i^n}{n^3}$$

الحل:

نطبق اختبار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(2n+3)i^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{(2n+1)i^n}{n^3}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+3)i^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{(2n+1)i^n}\right|$$

$$= |i|\lim_{n\to\infty}\frac{2n^4+3n^3}{2n^4+7n^3+9n^2+5n+1} = |i|.1 = 1$$

نطبق اختبار راب:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[1-\left|\frac{(2n+3)i^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{(2n+1)i^n}\right|\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1-\frac{2n^4+3n^3}{2n^4+7n^3+9n^2+5n+1}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{4n^3+9n^2+5n+1}{2n^4+7n^3+9n^2+5n+1}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{4n^4+9n^3+5n^2+n}{2n^4+7n^3+9n^2+5n+1}\right] = \frac{4}{2} = 2$$

$$> 1$$

بالتالي فالسلسلة متقاربة مطلقاً.

4 سلاسل القوى الصحيحة:

ليكن z متحول عقدي فإن السلسلة التي لها الشكل:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_o)^n = a_0 + a_1(z-z_o) + a_2(z-z_o)^2 + \cdots + a_n(z-z_o)^n + \cdots$$

تسمى بسلسلة قوى $(z-z_o)$ حيث أن جميع الأمثال $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ثوابت و z_o هو عدد عقدي ثابت يسمى بمركز السلسلة.

مثلاً: السلسلة:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{n+3}$$

هي سلسلة قوى $(z+i)$ ومركزها النقطة $z_o = -i$ وأمثالها $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$.

تعريف:

نسمي مجموعة كل القيم z التي من أجلها تكون السلسلة :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_o)^n = a_0 + a_1(z-z_o) + a_2(z-z_o)^2 + \cdots + a_n(z-z_o)^n + \cdots$$

متقاربة، تسمى بمنطقة تقارب سلسلة القوى، والنقطة z_o مركز المجال تنتمي دائماً إلى منطقة التقارب.

4.1 اختبار كوشي-آدمار

لتعيين منطقة تقارب السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_o)^n = a_0 + a_1(z-z_o) + a_2(z-z_o)^2 + \cdots + a_n(z-z_o)^n + \cdots$$

نأخذ النهاية:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$$

إذا كان q=0 فالسلسلة متقاربة في كل نقاط المستوي العقدي،

إذا كان q=∞ فالسلسلة متقاربة فقط في النقطة $z = z_o$ ،

إذا كان 0<q<∞ فالسلسلة تتقارب داخل دائرة مركزها z_o ونصف قطرها $R = \frac{1}{q}$ ، أي $|z - z_o| < \frac{1}{q}$، وتتباعد خارج هذه الدائرة.

ملاحظة:

يمكن حساب منطقة التقارب بتطبيق اختبار دالامبير وتبقى المناقشة نفسها من أجل $R = \frac{1}{q}$ كما في اختبار كوشي-آدمار

مثال(6):

ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{3^n}(z-1)^n$$

الحل:

نطبق اختبار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = q$$

أي أن:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}}(z-1)^{n+1}\ \frac{3^n}{(n^2+1)(z-1)^n}\right|$$

$$= |z-1| \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2n+2}{3n^2+3} = |z-1|.\frac{1}{3}$$

إذا كانت $|z-1|.\frac{1}{3} < 1$ فالسلسة تكون متقاربة مطلقاً،

ومنه:

$$|z-1|.\frac{1}{3} < 1 \implies |z-1| < 3 \implies |x+yi-1| < 3$$

$$\implies (x-1)^2 + y^2 < 9$$

وهي مجموعة النقاط الواقعة داخل القرص الذي مركزه (1,0) ونصف قطره 3 بحيث لا يشمل محيط القرص.

مثال(7):

ادرس تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3z)^n}{(n+1)!}$$

الحل:

نطبق اختبار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(3z)^{n+1}}{(n+2)!}.\frac{(n+1)!}{(3z)^n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{3z}{n+2}\right| = 0$$

بالتالي فإن السلسلة متقاربة من أجل جميع قيم z

مثال(8):

عين مركز ومنطقة تقارب السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

الحل:

مركز السلسلة هو الصفر، لحساب منطقة التقارب نطبق اختبار الجذر النوني:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|z|^n} = |z| = q$$

بالتالي السلسلة تكون متقاربة إذا كان $|z| < 1$ أي دائرة تقارب هذه السلسلة $|z| = 1$ ومنطقة تقارب هذه السلسلة هي القرص الدائري $|z| < 1$.

مثال(9):

ادرس تقارب السلسلة:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n (z+i)^n$$

الحل:

بتطبيق اختبار كوشي-آدمار:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^n|} = 2 = q$$

أي منطقة التقارب ضمن دائرة مركزها $Z_o = -i$ ونصف قطرها $\mathrm{R} = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$.

إذاً تكون السلسلة متقاربة من أجل $|Z - Z_o| < \frac{1}{q}$ ومنه:

$$|Z+i| < \frac{1}{2} \Longrightarrow \sqrt{x^2 + (y+1)^2} < \frac{1}{2} \implies x^2 + (y+1)^2 < \frac{1}{4}$$

نظرية:

إن نصف قطر تقارب السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a_n z^n}$ يعطى بالعلاقة:

$$R = \frac{1}{q}$$

حيث q تعطى بأحد الدستورين:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = q$$

مثال(10):

أوجد نصف قطر تقارب السلسلة

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} z^n$$

الحل:

نصف قطر تقارب السلسلة $R = \frac{1}{q}$ حيث أن $\mathrm{a_n} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!}.\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2(n!)^2}{(2n+2)(2n+1)(2n)!}.\frac{(2n)!}{(n!)^2}\right|$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1}{4} = q$$

ومنه $R = \frac{1}{q} = 4$

بالتالي السلسلة متقاربة ضمن الدائرة $|z| = 4$

مثال(11):

عين دائرة تقارب السلسلة

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}z^n$$

الحل:

$$q = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)!}{(2n+2)!}.\frac{(2n)!}{2^n n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+1)}{(2n+2)(2n+1)}$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)} = 0$$

هذا يعني أن السلسلة متقاربة من أجل أي نقطة من المستوي العقدي.

أو نطبق اختبار دالامبير:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}(n+1)!\,z^{n+1}}{(2n+2)!}.\frac{(2n)!}{2^n n!\,z^n}\right| = |z|.\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)} = 0$$

بالتالي فإن السلسلة متقاربة من أجل جميع قيم z.

==========

مسألة(1): عين دائرة التقارب لكل من السلاسل التالية:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n^2+1}$ 2) $\sum_{n=0}^{\infty}(2^n-1)z^n$ 3) $\sum_{n=0}^{\infty}n!\,z^n$

مسألة(2): ادرس تقارب السلسلة العددية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}}{5^{\frac{n}{2}}}$$